


| | | |
|--|-------|--|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

УТВЕРЖДЕНО
 решением Ученого совета факультета математики,
 информационных и авиационных технологий
 от « 17 » мая 2022 г. протокол № 4/22
 Председатель Волков М.А.
 (подпись, печать) (подпись)
 « 17 » мая 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

| | |
|------------|---|
| Дисциплина | Вариационное исчисление |
| Факультет | Математики, информационных и авиационных технологий |
| Кафедра | Прикладной математики |
| Курс | 1 |

Направление (специальность): 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль/специализация): Имитационное моделирование и анализ данных

Форма обучения: очная

Дата введения в учебный процесс УлГУ:

1 сентября 2022 г.



Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № ___ от ___ 20__ г.


Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № ___ от ___ 20__ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № ___ от ___ 20__ г.

Сведения о разработчиках:

| ФИО | Кафедра | Должность, ученая степень, звание |
|--------------|---------|--------------------------------------|
| Савинов Ю.Г. | ПМ | Доцент, к.ф.м.н., доцент |

| СОГЛАСОВАНО | СОГЛАСОВАНО |
|--|---|
| Заведующий кафедрой, реализующей дисциплину | Заведующий выпускающей кафедрой |
|  / <u>Бутов А.А.</u> / Подпись / ФИО «14» мая 2022 г. |  / <u>Бутов А.А.</u> / Подпись / ФИО «14» мая 2022 г. |

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Учебная дисциплина «Вариационное исчисление» знакомит студентов с классическими методами вариационного исчисления. Она является одной из дисциплин по выбору по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Цель дисциплины: ознакомление студентов с основами методов вариационного исчисления; формирование навыков работы с абстрактными понятиями математики; знакомство с прикладными задачами дисциплины.

Основной задачей изучения дисциплины является освоение базовой техники составления и решения задач вариационного исчисления, которые естественным образом возникают во многих областях человеческой деятельности. Для его понимания необходимо знакомство с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений в объеме курса бакалавриата.

Дисциплина «Вариационное исчисление» базируется на знаниях и умениях, полученных студентами при изучении курсов (по программам бакалавриата или специалитета): математический анализ, алгебра и геометрия, дифференциальные уравнения.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Вариационное исчисление» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)» Основной Профессиональной Образовательной Программы по направлению 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Данная дисциплина базируется на входных знаниях, умениях, навыках и компетенциях студента, полученных им в бакалавриате.

Результаты освоения дисциплины будут необходимы для дальнейшего процесса обучения в рамках поэтапного формирования компетенций при изучении последующих дисциплин (указаны в ФОС, пункт 1): «Математическое моделирование сложных систем», а также для прохождения всех видов практик и государственной итоговой аттестации.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ


| Код и наименование реализуемой компетенции | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций |
|---|--|
| ПК-3 способность разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий | знать основные определения, формулировки теорем и постановки основных типов задач вариационного исчисления уметь решать основные типы задач вариационного исчисления владеть методами решения основных типов задач вариационного исчисления |

4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 5 зачетных единиц.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах):

| Вид учебной работы | Количество часов (форма обучения: очная) |
|--------------------|--|
|--------------------|--|

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |


| 1 | Всего по плану | В т.ч. по семестрам | |
|---|--|--|---|
| | | 1 | 2 |
| Контактная работа обучающихся с преподавателем в соответствии с УП | 366 | 36 | |
| Аудиторные занятия | 36 | 36 | |
| Лекции | 18 | 18 | |
| Семинары и практические занятия | – | – | |
| Лабораторные работы, практикумы | 18 | 18 | |
| Самостоятельная работа | 108 | 108 | |
| Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы: тестирование, контр. работа, коллоквиум, реферат и др. (не менее 2 видов) | устный опрос, сдача лабораторных работ | устный опрос, сдача лабораторных работ | |
| Курсовая работа | – | – | |
| Виды промежуточной аттестации (экзамен, зачет) | экзамен 36 | экзамен 36 | |
| Всего часов по дисциплине | 180 | 180 | |

*В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий в таблице через слеш указывается количество часов работы ППС с обучающимися для проведения занятий в дистанционном формате с применением электронного обучения


4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.

| Название разделов и тем | Всего | Виды учебных занятий | | | | | Форма текущего контроля знаний |
|---|-------|----------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|------------------------|--------------------------------|
| | | Аудиторные занятия | | | Занятия в интерактивной форме | Самостоятельная работа | |
| | | Лекции | Практические занятия, семинары | Лабораторные работы, практикумы | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 семестр | | | | | | | |
| Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ | | | | | | | |
| 1.1. История развития вариационного исчисления | 9 | 1 | | | | 8 | устный опрос |
| Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления | | | | | | | |
| 2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее | 11 | 1 | | - | | 10 | устный опрос |

| | | |
|--|-------|--|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

| | | | | | | | |
|--|----|---|--|---|--|----|--|
| свойства | | | | | | | |
| 2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера | 12 | 2 | | - | | 10 | устный опрос |
| 2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами | 21 | 2 | | 9 | | 10 | устный опрос, проверка лабораторной работы |
| 2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами | 21 | 2 | | 9 | | 10 | устный опрос, проверка лабораторной работы |
| 2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца | 12 | 2 | | | | 10 | устный опрос |
| 2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в | 12 | 2 | | | | 10 | устный опрос |

| | | |
|--|-------|--|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

| | | | | | | | |
|---|-----|----|--|--|----|-----|--------------|
| задаче Лагранжа | | | | | | | |
| Раздел 3. Условия второго порядка | | | | | | | |
| 3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума | 23 | 2 | | | | 20 | устный опрос |
| 3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато | 12 | 2 | | | | 10 | устный опрос |
| 3.3 Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления | 12 | 2 | | | | 10 | устный опрос |
| Экзамен | 36 | | | | | | |
| Всего | 180 | 18 | | | 18 | 108 | |

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Раздел 1. Введение

1.1 История развития вариационного исчисления.

Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления

2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства.

2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.

2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.

2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца.

2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа.

Раздел 3. Условия второго порядка

3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума.


3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато.

3.3 Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления.

6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

По блоку математических и естественнонаучных дисциплин используются различные пакеты (свободно распространяемые для использования в учебных целях или на которые у УлГУ есть лицензии) прикладных программ, таких как Maple 16: Universities or Equivalent Degree Granting Institutions Non-Floating New License 5 to 100 Users Academic (академическая, бессрочная). При выполнении лабораторных работ возможно использование других пакетов (Mathcad, Mathematica, MatLab и др.).

Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления

Тема 2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.

Лабораторная работа № 1. *Найти расстояние между кривыми в пакете Maple.*

Методические указания (рекомендации): использовать команды **Diff**, **diff**, **dsolve**.

Введем обозначения: $Y = y(x)$, $DY = y'(x)$, $D2Y = y''(x)$, $x_0 = x_0$, $x_1 = x_1$,
 $y_0 = y_0$, $y_1 = y_1$.

Пример 1. Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$.


Решение: Эта задача с подвижными границами. Задача сводится к нахождению экстремального значения функционала $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2} dx$, при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y = \varphi(x) = x^2$, а правый – по прямой $y = \psi(x) = x - 5$.

1. Задаем подынтегральную функцию:

>restart;

>F:=(x,Y,DY)->sqrt(1+DY^2);

$$F := (x, Y, DY) \rightarrow \sqrt{1 + DY^2}$$

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

> $x0:=X0;x1:=X1;$

$$x0 := X0 \quad x1 := X1$$

2. Задаем две фиксированные кривые $y = x^2$ и $y = x - 5$, находим их производные:

> $F1:=(x)->x^2; dF1:=diff(F1(x),x);$

$$F1 := x \rightarrow x^2 \\ dF1 := 2x$$

> $F2:=(x)->x-5; dF2:=diff(F2(x),x);$

$$F2 := x \rightarrow x - 5 \\ dF2 := 1$$

3. Составляем функционал:

> $J:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1);$

$$J := \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} dx$$

4. Записываем основную формулу уравнения Эйлера:


> $eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)*DY-diff(F(x,Y,DY),DY^2)*D2Y=0;$

$$eq := - \left(- \frac{DY^2}{(1 + DY^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + DY^2}} \right) D2Y = 0$$

5. Выполняем замены (операторsubs) $Y = y(x)$, $DY = y'(x)$, $D2Y = y''(x)$:

> $eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x^2),eq);$

$$eq1 := - \left(- \frac{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) = 0$$

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

6. Находим общее решение уравнения Эйлера:

> rez:=dsolve(eq1);

$$rez := y(x) = _C1 x + _C2$$

> assign(rez):y(x):

7. Записываем условия трансверсальности:

$$\left[F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right]_{x=x_0} = 0, \left[F(x, y, y') + (\psi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right]_{x=x_1} = 0.$$

> dFdY:=diff(F(x,Y,DY),DY);

$$dFdY = \frac{DY}{\sqrt{1 + DY^2}}$$

> df:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x\$2),dFdY):

> us_t1:=F(x,y(x),diff(y(x),x))+(dF1-diff(y(x),x))*df=0;

$$us_t1 := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(2x - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

> us_t2:=F(x,y(x),diff(y(x),x))+(dF2-diff(y(x),x))*df=0;


$$us_t2 := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(1 - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

> a:=subs(x=x0,us_t1);

$$a := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(2X0 - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

> b:=subs(x=x1,us_t2);

$$b := \sqrt{1 + _C1^2} + \frac{(1 - _C1) _C1}{\sqrt{1 + _C1^2}} = 0$$

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

8. Записываем граничные условия

$$y(x_0) = C_1 x_0 + C_2 = \varphi(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = C_1 x_1 + C_2 = \psi(x_1) = x_1 - 5.$$

> `left:=subs(x=x0,y(x))=F1(x0);`

$$left := _C1 X0 + _C2 = X0^2$$

> `right:=subs(x=x1,y(x))=F2(x1);`

$$right := _C1 X1 + _C2 = X1 - 5$$

9. Находим $_C1$, $_C2$, $X0$, $X1$ и экстремаль:

> `rez1:=solve({left,right,a,b});`

$$rez1 := \left\{ X0 = \frac{1}{2}, X1 = \frac{23}{8}, _C1 = -1, _C2 = \frac{3}{4} \right\}$$

> `y(x):=subs(rez1,y(x));assign(rez1);`

$$y(x) := -x + \frac{3}{4}$$

10. Находим значение функционала при полученном решении:


> `F(x,y(x),diff(y(x),x)):`

> `J;`

$$\frac{19}{8} \sqrt{2}$$

Варианты заданий

1. Найти расстояние между параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x - 2$.
2. Найти расстояние между параболой $y = x^2 + 3$ и прямой $y = x - 3$.
3. Найти расстояние между параболой $y = x^2 + 3$ и прямой $y = x - 5$.
4. Найти расстояние между параболой $y = 2x^2$ и прямой $y = x - 3$.
5. Найти расстояние между параболой $y = 3x^2$ и прямой $y = x - 6$.
6. Найти расстояние между параболой $y = 2x^2 + 1$ и прямой $y = x - 4$.
7. Найти расстояние между параболой $y = 3x^2 + 2$ и прямой $y = x - 3$.
8. Найти расстояние между параболой $y = 2x^2 + 1$ и прямой $y = x - 5$.
9. Найти расстояние между параболой $y = 4x^2 + 1$ и прямой $y = x - 1$.
10. Найти расстояние между параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = x - 2$.

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

Тема 2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.

Лабораторная работа №2. Найти экстремаль функционала в пакете Maple.

Методические указания (рекомендации): использовать команды **Diff**, **diff**, **dsolve**.

Пример 2. Найти экстремаль для функционала $J[y(x)] = \int_0^1 y'(y' - x) dx$.

1. Задаем подинтегральную функцию и известные данные:

> **restart;**

> **F:=(x,Y,DY)->DY*(DY-x);**

$$F = (x, Y, DY) \rightarrow DY(DY - x)$$

> **x0:=0;x1:=1;**

$$x0 := 0$$

$$x1 := 1$$

2. Составляем функционал:

> **J:=int(F(x,y(x),diff(y(x),x)),x=x0..x1);**

$$J = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) \left(\frac{d}{dx} y(x) - x \right) dx$$

3. Записываем основную формулу уравнения Эйлера:

> **eq:=diff(F(x,Y,DY),Y)-diff(diff(F(x,Y,DY),x),DY)-diff(diff(F(x,Y,DY),Y),DY)*DY-diff(F(x,Y,DY),DY\$2)*D2Y=0;**

$$eq := 1 - 2 D2Y = 0$$

4. Выполняем замены (оператор subs) $Y = y(x)$, $DY = y'(x)$, $D2Y = y''(x)$:

> **eq1:=subs(Y=y(x),DY=diff(y(x),x),D2Y=diff(y(x),x\$2),eq);**

$$eq1 := 1 - 2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) = 0$$


5. Находим общее решение уравнения Эйлера.

> **rez:=dsolve(eq1);**

$$rez := y(x) = \frac{1}{4} x^2 + _C1 x + _C2$$

> **assign(rez):y(x);**

$$\frac{1}{4} x^2 + _C1 x + _C2$$

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

6. Записываем естественные краевые условия на левом и правом концах $F_{y'}(x, y, y')|_{x=0} = 0$, $F_{y'}(x, y, y')|_{x=1} = 0$:

> $dFdY := \text{diff}(F(x, Y, DY), DY)$;

$$dFdY = 2 DY - x$$

> $us := \text{subs}(Y=y(x), DY=\text{diff}(y(x), x), D2Y=\text{diff}(y(x), x)\$2), dFdY)=0$;

$$us := 2_C1 = 0$$

> $right := \text{subs}(x=x0, us)$;

$$right = 2_C1 = 0$$

> $left := \text{subs}(x=x1, us)$;

$$left = 2_C1 = 0$$

7. Решаем систему:

> $rez1 := \text{solve}(\{right, left\})$;

$$rez1 = \{_C1 = 0\}$$

> $y(x) := \text{subs}(rez1, y(x))$;

$$y(x) := \frac{1}{4} x^2 + _C2$$

8. Находим значение функционала при полученном решении:

> $F(x, y(x), \text{diff}(y(x), x))$;

$$-\frac{1}{4} x^2$$

> J ;

$$-\frac{1}{12}$$

Варианты заданий

Для своего варианта функционалов а), б), с) найти экстремали. Вычислить значения функционалов на найденных экстремалиях.

Вариант 1.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx$; $y(-1) = 3$; $y(1) = 1$;

b). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = -2$;


c). $J(y) = \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2} dx$; $y(0) = 2$; $y(1) = 3$;

Вариант 2.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 4$;

b). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'\sin 2x - x^2) dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = -1$;

c). $J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$; $y(0) = 2$; $y(1) = 1$;

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

Вариант 3.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 4x^2y + x \cos x) dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 0.5$;
- b). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y' \cos 2x + 5 \sin 3x) dx$; $y(0) = 2$; $y(2) = -3$;
- c). $J(y) = \int_0^1 yy'^2 dx$; $y(0) = 2$; $y(1) = 1$;

Вариант 4.

- a). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 9y^2 + 2xy - x \sin x) dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = 2$;
- b). $J(y) = \int_1^3 \left(y'^2 - \frac{4y'}{x} + x \sin x \right) dx$; $y(1) = 1$; $y(3) = -2$;
- c). $J(y) = \int_0^1 \sqrt{y(1+y^2)} dx$; $y(0) = 1$; $y(1) = 3$;

Вариант 5.

- a). $J(y) = \int_{-2}^0 (y'^2 - 4y^2 + 2y + xe^{2x}) dx$; $y(-2) = 0$; $y(0) = 1$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2y'e^x + \cos x) dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$;
- c). $J(y) = \int_1^3 y\sqrt{y'} dx$; $y(1) = 2$; $y(3) = 8$;

Вариант 6.


- a). $J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 9y^2 + 2y \sin x - x^2 e^x) dx$; $y(0) = 1$; $y(1) = -1$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 \left(y'^2 - \frac{2y'}{1+x^2} + e^{2x} \right) dx$; $y(-1) = 0$; $y(1) = 3$;
- c). $J(y) = \int_0^2 y\sqrt{1+y^2} dx$; $y(0) = -1$; $y(2) = -3$;

Вариант 7.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^x + 2x \cos x) dx$; $y(-1) = 1$; $y(1) = 3$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y'e^x \cos x - \sin x) dx$; $y(-1) = 1$; $y(1) = 2$;
- c). $J(y) = \int_0^2 yy'^2 dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = 3$;

Вариант 8.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 4ye^x - x \sin x) dx$; $y(-1) = 1$; $y(1) = 3$;
- b). $J(y) = \int_1^3 (y'^2 - y' \ln x + 2x) dx$; $y(1) = 2$; $y(3) = -1$;

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

c). $J(y) = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$; $y(0)=4$; $y(2)=2$;

Вариант 9.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=3$;

b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y' + y'^2 \cos^2 x - \sin^2 x) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=-2$;

c). $J(y) = \int_0^2 y\sqrt{y'} dx$; $y(0)=2$; $y(2)=4$;

Вариант 10.

a). $J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + y \cos x - 5x) dx$; $y(0)=2$; $y(2)=2$;

b). $J(y) = \int_1^3 (y' + y'^2 \sin^2 x + e^{2x}) dx$; $y(1)=-1$; $y(3)=4$;

c). $J(y) = \int_0^2 \sqrt{y(1+y'^2)} dx$; $y(0)=2$; $y(2)=1$;

8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ


1 семестр (экзамен)

1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства.
2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами.
4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности.
5. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами.
6. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца.
7. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца.
8. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа.
9. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума.
10. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато.
11. Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления.

10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ


Форма обучения: очная.

| Название разделов и тем | Вид самостоятельной работы (проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная) | Объем в часах | Форма контроля |
|-------------------------|--|---------------|----------------|
|-------------------------|--|---------------|----------------|

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

| | | | |
|--|---|----|--|
| | <i>работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.)</i> | | |
| 1 семестр | | | |
| Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ | | | |
| 1.1. История развития вариационного исчисления | Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена | 8 | устный опрос |
| Раздел 2. Классические задачи вариационного исчисления | | | |
| 2.1. Функционал. Экстремум функционала. Вариация и ее свойства | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос |
| 2.2. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос |
| 2.3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос, сдача лабораторных работ |
| 2.4. Постановка задачи вариационного исчисления с подвижными границами. Условия трансверсальности. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче вариационного исчисления с подвижными границами | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос, сдача лабораторных работ |
| 2.5. Задача Больца. Условия трансверсальности в задаче Больца. Необходимые условия существования слабого экстремума в задаче Больца | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос |
| 2.6. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Необходимые условия существования экстремума в задаче Лагранжа | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос |
| Раздел 3. Условия второго порядка | | | |
| 3.1. Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса. Достаточные условия существования экстремума | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 20 | устный опрос |
| 3.2. Два подхода к исследованию задач вариационного исчисления. Функциональное пространство. Производные Фреше и Гато | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос |
| 3.3. Понятие о численных методах решения задач вариационного исчисления | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче экзамена | 10 | устный опрос |

11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

а) Список рекомендуемой литературы

основная

1. Эльсгольд Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов / Эльсгольд Лев Эрнестович. - Москва : Наука, 1965. - 424 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3). - ISBN (в пер.) : 0.90.
2. Болдырев, Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие для вузов / Ю. Я. Болдырев. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 240 с. — (Университеты России). — ISBN 978-5-534-01707-6. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/438267>
3. Васильева А.Б., Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 432 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 10) - ISBN 5-9221-0276-1 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102761.html>

Дополнительная

1. Дьяконов В.П., Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах [Электронный ресурс] / Дьяконов В.П. - М. : ДМК Пресс, 2011. - 800 с. - ISBN 978-5-94074-751-2 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940747512.html>

учебно-методическая

1. Богданов А.Ю. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 2 / Богданов Андрей Юрьевич; УлГУ, ФМиИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2015. - 36 с. - Библиогр.: с. 35. - б/п URL - ftp://10.2.96.134/Text/bogdanov-2_2015.pdf
2. Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Вариационное исчисление» для студентов магистратуры по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» / Ю. Г. Савинов; УлГУ, Фак. математики, информ. и авиац. технологий. - Ульяновск : УлГУ, 2019. - Загл. с экрана; Неопубликованный ресурс. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 630 КБ). - Текст : электронный. <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/4774>
3. Савинов Ю. Г. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Вариационное исчисление» для студентов магистратуры по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» / Ю. Г. Савинов; УлГУ, Фак. математики, информ. и авиац. технологий. - Ульяновск : УлГУ, 2019. - Загл. с экрана; Неопубликованный ресурс. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 630 КБ). - Текст : электронный. <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/4775>


Согласовано:
ДИРЕКТОР НБ / **БУРХАНОВА М.М.** /  / 
 Должность сотрудника научной библиотеки / ФИО / подпись / дата

б) Программное обеспечение: МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8.
 ОС Calculate Linux, Maplesoft Maple Educational.

в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

1. Электронно-библиотечные системы:

- 1.1. Цифровой образовательный ресурс IPRsmart : электронно-библиотечная

| | | |
|--|-------|---|
| Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины | | |

система : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». - Саратов, [2022]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.2. Образовательная платформа ЮРАЙТ : образовательный ресурс, электронная библиотека : сайт / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. – Москва, [2022]. - URL: <https://urait.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.3. База данных «Электронная библиотека технического ВУЗа (ЭБС «Консультант студента») : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Политехресурс. – Москва, [2022]. – URL: <https://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.4. Консультант врача. Электронная медицинская библиотека : база данных : сайт / ООО Высшая школа организации и управления здравоохранением-Комплексный медицинский консалтинг. – Москва, [2022]. – URL: <https://www.rosmedlib.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.5. Большая медицинская библиотека : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Букап. – Томск, [2022]. – URL: <https://www.books-up.ru/ru/library/>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.6. ЭБС Лань : электронно-библиотечная система : сайт / ООО ЭБС Лань. – Санкт-Петербург, [2022]. – URL: <https://e.lanbook.com>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.7. ЭБС **Znanium.com** : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Знаниум. - Москва, [2022]. - URL: <http://znanium.com>. – Режим доступа : для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.8. Clinical Collection : научно-информационная база данных EBSCO // EBSCOhost : [портал]. – URL: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/search/advanced?vid=1&sid=9f57a3e1-1191-414b-8763-e97828f9f7e1%40sessionmgr102>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

1.9. База данных «Русский как иностранный» : электронно-образовательный ресурс для иностранных студентов : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». – Саратов, [2022]. – URL: <https://ros-edu.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: справочная правовая система. /ООО «Консультант Плюс» - Электрон. дан. - Москва : КонсультантПлюс, [2022].

3. Базы данных периодических изданий:

3.1. База данных периодических изданий EastView : электронные журналы / ООО ИВИС. - Москва, [2022]. – URL: <https://dlib.eastview.com/browse/udb/12>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

3.2. eLIBRARY.RU: научная электронная библиотека : сайт / ООО Научная Электронная Библиотека. – Москва, [2022]. – URL: <http://elibrary.ru>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный

3.3. Электронная библиотека «Издательского дома «Гребенников» (Grebinnikon) : электронная библиотека / ООО ИД Гребенников. – Москва, [2022]. – URL: <https://id2.action-media.ru/Personal/Products>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

4. Федеральная государственная информационная система «Национальная электронная библиотека» : электронная библиотека : сайт / ФГБУ РГБ. – Москва, [2022]. – URL: <https://нэб.рф>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

5. SMART Imagebase : научно-информационная база данных EBSCO // EBSCOhost

